V олимпиада им. академика А.Г. Шипунова

Тульская область, 4 октября 2020 г.

Решение задач, 10 класс.

М1. Решите неравенство: $\sqrt{\frac{3-x}{1+x}} \geq -x$.

Решение: Выпишем ОДЗ: $\frac{3-x}{1+x} \geq 0 \to x \in (-1; 3]$

Если $x \geq 0$, то неравенство верно: $\sqrt{\frac{3-x}{1+x}} \geq 0 \geq -x$

Если $x < 0$, то $-x > 0$, в этом случае можно возвести неравенство в квадрат:

$\frac{3-x}{1+x} \geq x^2 \to \frac{3-x-x^2-x^3}{1+x} \geq 0$. Уравнение $3 - x - x^2 - x^3 = 0$ имеет корень 1, поэтому $(3 - x - x^2 - x^3)$ по теореме Безу делится на $(x - 1)$:

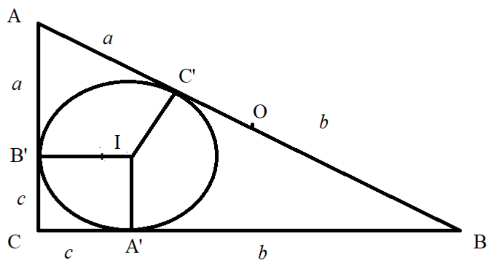
$3 - x - x^2 - x^3 = (1 - x)(3 + 2x + x^2)$. Заметим, что $3 + 2x + x^2 > 0$, т.о.

$\frac{3-x-x^2-x^3}{1+x} \geq 0 \leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \leftrightarrow x \in (-1; 1]$. С учетом случая $x < 0, x \in (-1; 0)$.

Объединяя случаи, получим **ответ**: $x \in (-1; 3]$.

М2. Докажите, что в треугольнике со сторонами 10, 24 и 26 расстояние между центрами вписанной и описанной окружности лежит в промежутке между 8 и 9.

Решение: Заметим, что треугольник со сторонами $AC = 10$, $BC = 24$ и $AB = 26$ прямоугольный, т.к. $10^2 + 24^2 = 26^2$. Центр описанной окружности прямоугольного треугольника O находится на середине гипотенузы. Опустим из центра вписанной окружности I высоту $C'I$ на гипотенузу. Величина этой высоты равна радиусу вписанной окружности: $pr = S = \frac{10\times24}{2} \to pr = 120 \to 30r = 120 \to r = 4$.



Найдем OI из прямоугольного треугольника $C'IO$: $IC' = 4$. Для того, чтобы найти $C'O$, найдем AC'. $AC' = AB' = a$, как отрезки касательных, аналогично $BC' = BA' = b$; $CB' = CA' = c$. Тогда получим: $10 = a + c$; $24 = c + b$; $26 = a + b$, откуда $a = (10 + 26 - 24)/2 = 6$, $OC' = 13 - 6 = 7$.

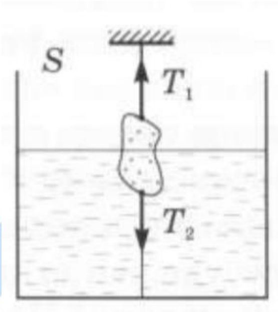
Тогда $OI = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$. Т.к. $64 < 65 < 81$, получим: $8 < \sqrt{65} < 9$.

Ответ: да, верно.

М3. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 36. Петя берет два произвольных числа, записанных на доске, a и b, стирает их и записывает на доску число $ab - a - b + 2$. Затем Петя повторяет эту операцию, пока на доске не останется всего одно число. Может ли это число делиться на 37?

Решение: Заметим, что если одно из стираемых чисел, например, a, равняется единице, то после операции мы получим: $ab - a - b + 2 = b - 1 - b + 2 = 1$. Это означает, что мы не сможем стереть единицу с доски – после операции она появляется снова. Таким образом, при любом порядке операций Пети в конце на доске останется единица. Единица на 37 не делится. **Ответ**: не может.

Ф1. *«Глобальное потепление».* Лед расположен на натянутых лесках в сосуде так, как показано на рисунке. Площадь стакана $S = 200$ см^2. Сила натяжения верхней лески 4,5 Н, нижней 2,5 Н. Найти на сколько и в какую сторону изменится уровень воды в стакане после того как весь лед растает?



Решение. Выделим систему вода+лед. Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось до и после таяния льда:

$$Mg + mg + T_2 - T_1 - N_1 = 0$$

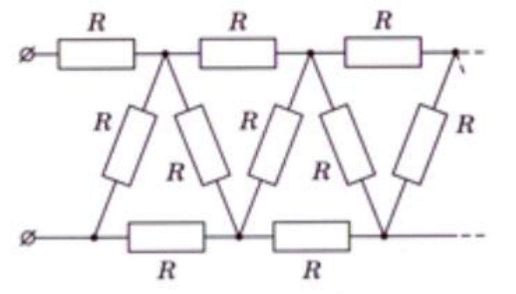
$$Mg + mg - N_2 = 0,$$

где N_1 и N_2 – силы реакции дна. С точки зрения дна – это сила, вызванная давлением воды, то есть равная ρgHS. Вычитая уравнения получаем: $N_2 - N_1 = T_1 - T_2$, или $\rho gS\Delta H = T_1 - T_2$.

Отсюда, **ответ**: $\Delta H = \frac{T_1 - T_2}{\rho gS} = 1$ см.

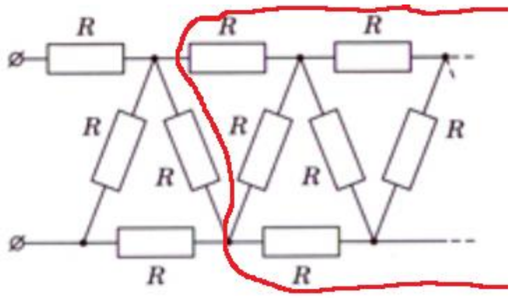
Так же возможен вариант решения через силу Архимеда.

Ф2. *«Место для остановки общественного транспорта».* Найти сопротивление бесконечной цепочки, схема которой изображена на рисунке.



Решение:

Заметим, что если выделить в цепи часть, без первых четырех элементов (см. рисунок), получится цепь идентичная первоначальной.



Обозначим сопротивление этого участка R_x. Разобьем всю цепь на участки с последовательным и параллельным сопротивлением резисторов:

R_1: R_x параллельно R;

R_2: R_1 последовательно с R;

R_3: R_2 параллельно R;

$R_4 = R_x$: R_3 последовательно с R;

Отсюда получаем выражение для каждого из резисторов и итоговое уравнение:

$$R_1 = \frac{R_x \cdot R}{R_x + R};$$

$$R_2 = R_1 + R;$$

$$R_3 = \frac{R_x \cdot R_2}{R_x + R_2};$$

$$R_4 = R_x = R_3 + R;$$

После подстановки всех данных получаем квадратное уравнение: $R_x^2 - RR_x - R^2 = 0$

Решение этого уравнения только одно (второе – отрицательное): $R_x = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}R$

Ответ: $R_x = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}R$